Partie 1 : Thermodynamique
Série 1

Formes différentielles

Exercice 1

Soit la fonction $f(x, y) = x^3 + 2xy + 4y^2$

1. Calculer les dérivées partielles premières suivantes :
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \quad ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$$
En déduire la différentielle df.
2. Calculer les dérivées partielles secondes normales et croisées :
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_y \quad ; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_x \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
3. Montrer que df est une différentielle totale exacte.

Exercice 2

1. Calculer la différentielle de la fonction :
$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^2} - 2x^3y^2$$
2. On considère les formes différentielles suivantes :
$$\delta f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}dx - \frac{2}{3}\frac{x^3}{y^3}dy$$
$$\delta g(x, y) = \left(\frac{x^2}{y} - 2y\right)dx - \left(\frac{x^3}{y^2} + 3x\right)dy$$
   (a) Laquelle de ces deux formes est une différentielle totale ?
3. On considère l'équation d'état d'un système $f(P, V, T) = 0$, où P, V, et T sont les paramètres d'état du système.
   (a) Donner les expressions de dP et dV.
   (b) En déduire les relations suivantes :
$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = 1$$
   et
$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1$$
   (c) Vérifier ces relations pour une mole de gaz parfait, d'équation d'état : $PV = RT$

Coefficients thermo-élastiques

Exercice 3

Ces coefficients ont été introduits pour différencier entre deux fluides soumis aux mêmes contraintes mécaniques ou thermiques. Si l'on considère par exemple deux gaz, soumis à une même déformation élastique, et que l'on veut comparer leur dilatation (ou éventuellement, leur compression), il suffit de comparer leur coefficients thermo-élastiques qui sont étroitement liés à cette déformation.

Les coefficients thermo-élastiques sont définis de la manière suivante :

— Coefficient de dilatation "isobare" (à pression constante) : $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

— Coefficient de compression "isochore" (à volume constant) : $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

— Coefficient compressibilité "isotherme" (à température constante) : $\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

1. Exprimer en fonction des variables indépendantes P et T, les coefficients thermo-élastiques d'un gaz parfait.
2. Une mole de gaz obéit à l'équation suivante : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$, où a et R sont des constantes.
   (a) Exprimer, en fonction des variables indépendantes V et T, les coefficients de dilatation à pression constante α et de compression à volume constant β de ce gaz.
   (b) Trouver la relation générale liant le coefficient de compressibilité isotherme χ, les coefficients α et β, et la pression P du gaz. En déduire l'expression du coefficient χ de ce gaz.
   (c) Dans le cas où l'on peut négliger la pression interne du gaz ($a \approx 0$), montrer que χ peut être écrit sous la forme : $\chi = \frac{V}{R} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta}$