

Partie 1 : Thermodynamique

Solution de la série 2

EXERCICE 1

1. Calcul de la pression P_1 dans le réservoir à la fin du gonflage :

La loi des gaz parfaits est donnée par :

$$PV = nRT$$

où P est la pression, V le volume, n la quantité de matière (en moles), R la constante des gaz parfaits, et T la température.

Avant le gonflage :

$$n_0 = \frac{P_0 V_0}{RT}$$

Après le gonflage :

$$n_1 = \frac{P_1 V_0}{RT} \quad \text{et} \quad n_p = \frac{PV}{RT}$$

La conservation de la masse d'air impose que le nombre total de moles reste constant :

$$n_0 = n_1 + n_p$$

Substituons les expressions de n_0 , n_1 , et n_p :

$$\frac{P_0 V_0}{RT} = \frac{P_1 V_0}{RT} + \frac{PV}{RT}$$

En simplifiant par RT :

$$P_0 V_0 = P_1 V_0 + PV$$

Réolvons pour P_1 :

$$P_1 = \frac{P_0 V_0 - PV}{V_0}$$

En substituant les valeurs :

$$P_1 = \frac{(15 P_{atm}) \cdot 80 L - (2.6 P_{atm}) \cdot 50 L}{80 L}$$

$$P_1 = \frac{1200 P_{atm} - 130 P_{atm}}{80}$$

$$P_1 = \frac{1070 P_{atm}}{80} = 13.375 P_{atm}$$

La pression finale dans le réservoir est donc :

$$P_1 = 13.375 P_{atm}$$

2. Nombre de pneus que l'on peut gonfler :

Le nombre de pneus N que l'on peut gonfler est donné par :

$$N = \frac{n_0}{n_p} = \frac{\frac{P_0 V_0}{RT}}{\frac{PV}{RT}} = \frac{P_0 V_0}{PV}$$

En substituant les valeurs :

$$N = \frac{15 \cdot 80}{2.6 \cdot 50}$$

$$N = \frac{1200}{130} = 9.23$$

On peut donc gonfler environ 9 pneus avec l'air contenu dans le réservoir.

EXERCICE 2

$$P_1 = 1,0 \text{ bar} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad P_2 = 10,0 \text{ bar} = 1,0 \times 10^6 \text{ Pa},$$

$$V_1 = 5,0 \text{ L} = 5,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3, \quad \gamma = 1,4, \quad R = 8,314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

1) Volume final V_2 :

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \implies V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{1/\gamma} = 5,0 \times 10^{-3} \left(\frac{1,0 \times 10^5}{1,0 \times 10^6} \right)^{1/1,4} \approx 9,65 \times 10^{-4} \text{ m}^3 = 0,965 \text{ L}.$$

2) Température finale T_2 : calculons d'abord T_1 par l'équation d'état

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{1,0 \times 10^5 \times 5,0 \times 10^{-3}}{1 \times 8,314} \approx 60,14 \text{ K}.$$

Pour une adiabatique réversible $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, donc

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \approx 60,14 \left(\frac{5,0 \times 10^{-3}}{9,65 \times 10^{-4}} \right)^{0,4} \approx 1,16 \times 10^2 \text{ K} \approx 116,1 \text{ K}.$$

3- Travail reçu par le gaz pendant la compression $W_{\text{reçu}}$:

Le travail reçu par le gaz est :

$$W_{\text{reçu}} = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1 - \gamma} \approx 1,163 \times 10^3 \text{ J}.$$

Donc, le travail reçu par le gaz (travail effectué sur le gaz) est :

$$W_{\text{reçu}} \approx 1,16 \text{ kJ}.$$

$V_2 \approx 0,965 \text{ L}, \quad T_2 \approx 116,1 \text{ K}, \quad W_{\text{reçu}} \approx 1,16 \times 10^3 \text{ J}$
--

EXERCICE 3

Calcule de C_{cal} :

$$\begin{aligned} m_1 &= 300 \text{ g} = 0,300 \text{ kg}, & m_2 &= 250 \text{ g} = 0,250 \text{ kg}, \\ T_1 &= 15^\circ\text{C}, & T_2 &= 60^\circ\text{C}, & T_f &= 34^\circ\text{C}, & c_e &= 4185 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \end{aligned}$$

Le bilan énergétique du système s'écrit :

$$m_1 c_e (T_f - T_1) + m_2 c_e (T_f - T_2) + C_{cal} (T_f - T_1) = 0.$$

D'où :

$$C_{cal} = - \frac{m_1 c_e (T_f - T_1) + m_2 c_e (T_f - T_2)}{T_f - T_1}.$$

Application numérique :

$$C_{cal} = - \frac{0,300 \times 4185 \times (34 - 15) + 0,250 \times 4185 \times (34 - 60)}{34 - 15} \simeq 1,76 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

$C_{cal} \approx 176 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

EXERCICE 4

1. Le travail à effectuer est égal à $W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$

On a

$$PV = nRT$$

d'où :

$$W = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Puisque la température est constante, on a aussi : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$ d'où :

$$W = -P_1 V_1 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

On trouve ainsi le travail à effectuer, soit $W = 30kJ$

Comme le gaz est supposé parfait, on a : $\Delta U = 0$,

d'où $Q = -W = -30kJ$, donc La chaleur dégagée est donc égale à $30kJ$, Soit 7.200 calories, avec 1 calorie = 4,18 Joules.

Le volume final est $V_2 = V_1 \frac{P_1}{P_2}$, soit : $V_2 = 5 \text{ litres}$

2. Pour une transformation réversible et adiabatique, on a

$$\frac{T_1^\gamma}{P_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^\gamma}{P_2^{\gamma-1}}, \text{ d'où } T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

La température finale, compte tenu de $\gamma = \frac{7}{5}$, est donc :

$$T_2 = 678K, \text{ soit } T_2 = 405^\circ C$$

De même, le volume final, dans une compression adiabatique est $V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

D'où, on trouve : $V_2 = 12 \text{ litres}$

Pour le travail W, on a :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = -P_1 V_1^\gamma \left(\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)_{V_1}^{V_2} = \frac{1}{\gamma-1} (P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

On trouve ainsi : $W = 35kJ$ (supérieur au travail précédent)

On peut d'ailleurs calculer ce travail d'une autre façon, puisque $W = \Delta U$, ($Q=0$).

On écrit alors, avec $\frac{5}{2}R$ par molécule :

$$W = \Delta U = \left(\frac{5}{2} nR \right) (T_2 - T_1) = \frac{P_1 V_1}{T_1} (T_2 - T_1)$$

On retrouve $W = 35kJ$

3. Dans le cas d'une compression irréversible mais adiabatique, la même quantité d'air est comprimée jusqu'à un volume final V_2' et une température T_2' sous l'effet d'une pression constante P_2 . On a ainsi : $\delta Q = 0$, c'est-à-dire :

$$\delta W = dU = -pdV = \left(\frac{5}{2} nR \right) dT$$

D'où, d'une part :

$$W = P_2 \int_{V_1'}^{V_2'} dV = -P_2(V_2' - V_1') \quad (\text{a})$$

et, d'autre part :

$$W = \left(\frac{5}{2}nR\right)(T_2' - T_1') = \frac{5}{2} \frac{P_1 V_1}{T_1} (T_2' - T_1') \quad (\text{b})$$

Comme $V_2' = \frac{nRT_2'}{P_2}$ et $V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$, on a, en égalant les relations (a) et (b) :

$$-P_2 \left(\frac{T_2'}{P_2} - \frac{T_1}{P_1} \right) = \frac{5}{2} (T_2' - T_1)$$

D'où

$$T_2' = \frac{2}{7} T_1 \left(\frac{5}{2} + \frac{P_2}{P_1} \right)$$

On trouve ainsi pour la température finale : $T_2' = 1850K$

On déduit alors de (b) le travail à effectuer, soit : $W = 134kJ$ et le volume final, déduit de (a) est alors : $V_2' = \frac{nRT_2'}{P_2} = 33 \text{ litres}$ ($n = \frac{V}{V_m}$ et $V_m = 24.4 \text{ l/mol}$).

On a ainsi, dans le cas irréversible, une compression plus faible que dans le cas réversible pour un travail à effectuer beaucoup plus important et une élévation de température également plus importante.

EXERCICE 5

1. L'état initial du gaz, représenté par le point 0, est caractérisé par :

$$P_0 = 2.10^5 Pa ; \quad V_0 = 14 \times 10^{-3} m^3 ; \quad T_0 = \frac{P_0 V_0}{R} = 336,78K$$

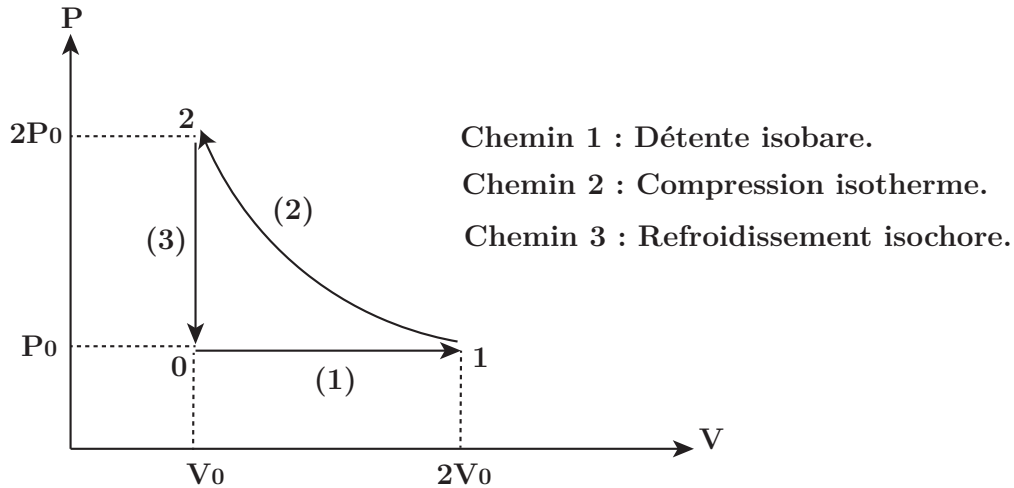
- A la fin de la détente isobare, l'état du gaz, représenté par le point A1, est caractérisé par :

$$P_1 = P_0 ; \quad V_1 = 2V_0 ; \quad T_1 = \frac{P_1 V_1}{R} = \frac{2P_0 V_0}{R} = 2T_0 = 673,56K$$

- A la fin de la compression isotherme, l'état du gaz représenté par le point A2, est caractérisé par

$$P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_0} = 2P_0 \quad (\text{ d 'après la loi de Mariotte }, \quad V_0 ; \quad 2T_0)$$

La pression maximale du gaz est donc : $P_2 = 2P_0 = 4.10^5 Pa$



2. — Au cours de la détente isobare $0 \rightarrow 1$ on a :

$$W_1 = -P_0(2V_0 - V_0) = -P_0V_0 = -2800J$$

$$Q_1 = C_P(T_1 - T_0) = \frac{7}{2}8,314 \times 336,78 = 9800J$$

— Au cours de la compression isotherme $1 \rightarrow 2$ on a :

$$W_2 = RT_1 \ln \frac{P_2}{P_0} = 2RT_0 \ln 2 = 3881,61J$$

$$Q_2 = \int_{V_1}^{V_2} P dV = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = -RT_0 \ln 2 = -3881,61J$$

— Au cours du refroidissement isochore $2 \rightarrow 0$ on a :

$$W_3 = 0J \quad (\text{à volume constant})$$

$$Q_3 = C_V(T_0 - T_1) = -\frac{5}{2}8,314 \times 336,78 = -7000J$$

Transformation	W en J	Q en J	DU= W+Q en J
Isobare	-2800	9800	7000
Isotherme	3881,61	-3881,61	0
Isochore	0	-7000	-7000
Total	1081,61	- 1081,61	0

Au cours du cycle :

Le bilan mécanique du cycle est donc : $W = W_1 + W_2 + W_3 = 1081,61J/mole$

La quantité de chaleur échangée est donc : $Q = -W = -1081,61J/mole$

La variation de l'énergie interne est nulle car c'est une fonction d'état.

W est positif, Q est négatif; par conséquent, le système a reçu un travail qu'il a intégralement restitué au milieu extérieur sous forme de chaleur.

EXERCICE 6

1. Le travail W_1 ? et la chaleur Q_1 ? Sur le chemin 1. Sur le chemin 1 la transformation est adiabatique (ou calorifugée ou adiatherme) réversible.
sur le chemin 1 la transformation est adiabatique réversible pour le gaz parfait s'écrit :

$$PV^\gamma = C^{te}$$

- (a) Le travail échangé au cours de cette transformation adiabatique réversible :

$$\delta W_1 = -PdV = -C^{te} \frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad -W_1 = -C^{te} \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$W_1 = C^{te} \frac{V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}}{\gamma - 1}$$

En prenant la relation de l'adiabatique entre les états A et B, pour un gaz parfait monoatomique nous avons :

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma = C^{te} \Rightarrow 32P_0 V_0^{5/3} = P_0 (V_0)^{5/3} = C^{te} \text{ donc } 8^{5/3} = (2^3)^{5/3} = 2^5 = 32$$

Le travail échangé au cours de la transformation pour passer de l'état A à l'état B devient :

$$W_1 = C^{te} \times \frac{V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}}{\gamma - 1} = \frac{P_B V_B^\gamma V_B^{1-\gamma} - P_A V_A^\gamma V_A^{1-\gamma}}{\gamma - 1} = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1}$$

Finalement

$$W_1 = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1} = \frac{8P_0 V_0 - 32P_0 V_0}{\gamma - 1} = -24 \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1}$$

$$W_1 = -24 \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1}$$

Le travail est cédé par le système à l'extérieur au cours de la transformation adiabatique : $W_1 < 0$, le travail est donc moteur (la variation de volume $\Delta V > 0$).

En remplaçant les variables par leurs valeurs ($\gamma = 5/3$ pour une gaz parfait

monoatomique) :

$$W_1 = -24 \frac{P_0 V_0}{\frac{5}{3} - 1} = -24 \times 3 \times \frac{P_0 V_0}{2} = -36 P_0 V_0$$

$$W_1 = -36 P_0 V_0$$

Le travail est $W_1 < 0$ donc c'est un travail moteur. Le système cède du travail au milieu extérieur.

- (b) Cependant le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur au cours de la transformation car la transformation est adiabatique :

$$Q_1 = 0$$

Le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur.

2. Le travail W_2 ? et la chaleur Q_2 ? sur le chemin 2. La transformation sur le chemin 2 est réversible.

- (a) Le travail sur le chemin 2 peut être décomposé en deux parties : le chemin AI et le chemin IB :

$$W_2 = W_A^I + W_I^B$$

sur le segment IB, la transformation est isochore $V = Cte$, c.-à-d., $dV = 0$.

$$W_I^B = 0 \quad \text{Car} \quad (\Delta V = 0)$$

sur le segment AI, la transformation est isobare $P = Cte$, c.-à-d., $dP = 0$.

Donc $P_A = P_I$

$$W_A^I = - \int_A^I P_A dV = -P_A \int_A^I dV = -P_A(V_I - V_A)$$

Donc

$$W_A^I = -P_A(V_I - V_A)$$

En remplaçant les variables par leurs valeurs : ($V_A = V_0$; $V_I = 8V_0$; $P_A = 32P_0$)

On a

$$W_A^I = -P_A(V_I - V_A) = -32P_0(8V_0 - V_0) = -224P_0V_0$$

Donc

$$W_A^I = -224P_0V_0$$

Finalement nous avons :

$$W_2 = W_A^I + W_I^B = W_A^I = -224P_0V_0$$

Le travail échangé par le système avec l'extérieur au cours de la transformation (AI)+(IB) est :

$$W_2 = -224P_0V_0$$

Le travail est $W_2 < 0$ donc c'est un travail moteur. Le système cède du travail au milieu extérieur.

(b) Pour la chaleur Q_2 échangée par le système sur le chemin 2

Le calcul de la quantité de chaleur sur le chemin 2 peut être se faire premièrement sur la portion (AI) et en suite sur la portion (IB) :

$$Q_2 = Q_A^I + Q_I^B$$

Or par définition une variation élémentaire de la chaleur peut s'écrire :

$$\delta Q = C_P dT + h dP = C_V dT + l dV$$

— Sur le segment AI, la transformation est isobare $P = \text{Cste}$; $dP = 0$.

$$\delta Q = C_P dT + h dP = C_P dT$$

Donc la chaleur élémentaire devient :

$$\delta Q = C_P dT$$

On intègre l'expression par rapport à la température et on a :

$$\delta Q_A^I = C_P \int_A^I dT = C_P (T_I - T_A)$$

On remplace les températures :

$$T_I = \frac{P_I V_I}{R}$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{R}$$

Et on obtient :

$$Q_A^I = C_P \left(\frac{P_I V_I}{R} - \frac{P_A V_A}{R} \right) = \frac{C_P}{R} (P_I V_I - P_A V_A)$$

Ensuite on remplace les variables par leurs valeurs :

$$P_I = P_A = 32P_0 \quad V_I = V_B = 8V_0$$

$$Q_A^I = -\frac{C_p}{R}(256P_0V_0 - 32P_0V_0)$$

En remplaçant $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$ et on obtient :

$$Q_A^I = \frac{\gamma}{\gamma-1} 224P_0V_0$$

Finalement la chaleur échangée par le système avec l'extérieure au cours de la transformation (AI) est :

$$Q_A^I = 224 \frac{\gamma}{\gamma-1} P_0V_0$$

La chaleur est négative $Q_A^I > 0$ donc le système cède la chaleur sur cette portion du chemin 2.

ii) Sur le segment IB, la transformation est isochore $V = \text{Cste}$; $dV = 0$.

$$\delta Q = C_v dT + l dV = C_v dT$$

Donc la chaleur élémentaire devient :

$$\delta Q = C_v dT$$

On intègre l'expression par rapport à la température et on a :

$$Q_B^I = C_v \int_I^B dT = C_v (T_B - T_I)$$

On remplace les températures :

$$T_I = \frac{P_I V_I}{R} \quad T_B = \frac{P_B V_B}{R}$$

Et on obtient :

$$Q_B^I = C_v \left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_I V_I}{R} \right) = C_v \frac{1}{R} (P_B V_B - P_I V_I)$$

Ensuite on remplace les variables par leurs valeurs :

$$P_I = P_A = 32P_0, \quad V_I = V_B = 8V_0, \quad P_B = P_0$$

On a :

$$Q_B^I = C_v \left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_I V_I}{R} \right) = C_v \frac{1}{R} (8P_0V_0 - 256P_0V_0)$$

En remplaçant $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$, on obtient finalement la chaleur échangée par le système avec l'extérieure au cours de la transformation (IB) :

$$\Rightarrow Q_B^I = -\frac{248}{\gamma-1}P_0V_0$$

La chaleur est négative $Q_B^I < 0$, donc le système cède la chaleur sur la portion (IB) du chemin 2.

Pour obtenir la chaleur échangée par le système sur le chemin 2, il faut faire la somme des chaleurs échangées sur les portions (AI) et (IB) :

$$Q_2 = Q_A^I + Q_B^I = \frac{224\gamma}{\gamma-1}P_0V_0 - \frac{248}{\gamma-1}P_0V_0$$

Finalement, la chaleur échangée par le système sur le chemin 2 est :

$$Q_2 = 224\frac{\gamma}{\gamma-1}P_0V_0 - \frac{248}{\gamma-1}P_0V_0 = 224\frac{\gamma - \frac{248}{224}}{\gamma-1}P_0V_0 = 224\frac{\gamma - \frac{31}{28}}{\gamma-1}P_0V_0 \approx 224\frac{\gamma-1,107}{\gamma-1}P_0V_0$$

La chaleur $Q_2 > 0$, donc le système reçoit de la chaleur lors de la transformation sur le chemin 2.

$$Q_2 = \frac{224\gamma - 248}{\gamma-1}P_0V_0$$

Donc, sur le chemin 2, le système cède du travail mais reçoit de la chaleur.

On remplace $\gamma = \frac{5}{3}$ pour un gaz parfait monoatomique :

$$Q_2 = \frac{224 \times \frac{5}{3} - 248}{\frac{5}{3} - 1}P_0V_0 = \frac{224 \times 5 - 248 \times 3}{2}P_0V_0 = \frac{1120 - 744}{2}P_0V_0 = 188P_0V_0$$

Donc :

$$Q_2 = 188P_0V_0$$

Le système reçoit de la chaleur du milieu extérieur.

3. Le travail W_3 et la chaleur Q_3 sur le chemin 3. La transformation sur le chemin 3 est réversible.

a) Travail sur le chemin 3

Le travail sur le chemin 3 peut être décomposé en deux parties : le chemin AJ et le chemin JB :

$$W_3 = W_A^J + W_B^J$$

Sur le segment AJ , la transformation est isochore ($V = \text{cte}$; $dV = 0$) :

$$W_A^J = 0 \quad (V = \text{cte})$$

Sur le segment JB , la transformation est isobare ($P = \text{cte}$; $dP = 0$) :

$$W_3 = W_B^J = - \int_J^B P_B dV = -P_B \int_J^B dV = -P_B (V_B - V_J)$$

Ensuite, on remplace les variables par leurs valeurs :

$$V_B = 8V_0 \quad V_J = V_0 \quad P_B = P_J = P_0$$

On a :

$$W_3 = W_J^B = -P_0 (8V_0 - V_0) = -7P_0V_0$$

Finalement le travail devient :

$$W_3 = -7P_0V_0$$

Le travail $W_3 < 0$, donc le travail est cédé au milieu extérieur sur la transformation du chemin 3. Le travail est donc moteur.

b) Pour la chaleur Q_3 échangée par le système sur le chemin 3

Le calcul de la quantité de chaleur sur le chemin 3 peut se faire premièrement sur la portion (AJ) et ensuite sur la portion (JB) :

$$Q_3 = Q_A^J + Q_J^B$$

Or par définition une variation élémentaire de la chaleur peut s'écrire :

$$\delta Q = C_p dT + h dP = C_v dT + l dV$$

i) Sur le segment **AJ**, la transformation est isochore $V = \text{Cste}$; $dV = 0$.

La chaleur élémentaire devient :

$$\delta Q = C_v dT$$

On intègre l'expression par rapport à la température et on a :

$$Q_4^A = C_v \int_A^J dT = C_v (T_J - T_A)$$

On remplace les températures :

$$\dots$$

$$T_J = \frac{P_J V_J}{R} \quad T_A = \frac{P_A V_A}{R}$$

Et on obtient :

$$Q_4^A = C_v \left(\frac{P_J V_J}{R} - \frac{P_A V_A}{R} \right) = \frac{C_v}{R} (P_J V_J - P_A V_A)$$

Ensuite on remplace les variables par leurs valeurs :

$$P_J = P_B = P_0, \quad P_A = 32P_0, \quad V_J = V_A = V_0$$

On a :

$$Q_4^A = \frac{C_v}{R} (P_0 V_0 - 32P_0 V_0)$$

En remplaçant $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$, on obtient :

$$Q_4^A = -\frac{31}{\gamma-1} P_0 V_0$$

Finalement, la chaleur échangée par le système avec l'extérieure au cours de la transformation (AJ) est :

$$Q_4^A = -\frac{31}{\gamma-1} P_0 V_0$$

La chaleur est négative $Q_4^A < 0$, donc le système cède la chaleur sur la portion (AJ) du chemin 3.

ii) Sur le segment **JB**, la transformation est isobare $P = \text{Cste}$; $dP = 0$.

$$\delta Q = C_p dT + h dP = C_p dT$$

La chaleur élémentaire devient :

$$\delta Q = C_p dT$$

On intègre l'expression par rapport à la température et on a :

$$Q_J^B = C_p \int_J^B dT = C_p (T_B - T_J)$$

On remplace les températures :

$$T_J = \frac{P_J V_J}{R}, \quad T_B = \frac{P_B V_B}{R}$$

Et on obtient :

$$Q_J^B = C_p \left(\frac{P_B V_B}{R} - \frac{P_J V_J}{R} \right) = \frac{C_p}{R} (P_B V_B - P_J V_J)$$

Ensuite, on remplace les variables par leurs valeurs :

$$V_B = 8V_0, \quad V_J = V_0, \quad P_B = P_J = P_0$$

On a :

$$Q_J^B = \frac{C_p}{R} (P_0 \cdot 8V_0 - P_0 \cdot V_0) = \frac{C_p}{R} (8P_0 V_0 - P_0 V_0)$$

En remplaçant $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$, on obtient :

$$Q_J^B = \frac{7\gamma}{\gamma - 1} P_0 V_0$$

Finalement, la chaleur échangée par le système avec l'extérieure au cours de la transformation (JB) est :

$$Q_J^B = \frac{7\gamma}{\gamma - 1} P_0 V_0$$

La chaleur est négative $Q_J^B > 0$, donc le système cède la chaleur sur la portion (JB) du chemin 3.

Pour obtenir la chaleur échangée par le système sur le chemin 3, il faut faire la somme des chaleurs échangées sur les portions (AJ) et (JB) :

$$Q_3 = Q_4^J + Q_J^B = -\frac{31}{\gamma - 1} P_0 V_0 + \frac{7\gamma}{\gamma - 1} P_0 V_0$$

Finalement, la chaleur échangée par le système sur le chemin 3 est :

$$Q_3 = Q_4^J + Q_J^B = -\frac{31}{\gamma-1}P_0V_0 + \frac{7\gamma}{\gamma-1}P_0V_0 = 7\frac{\gamma-7}{\gamma-1}P_0V_0 \approx 7\frac{\gamma-4,43}{\gamma-1}P_0V_0$$

La chaleur $Q_3 < 0$, donc le système cède de la chaleur lors de la transformation du chemin 3.

$$Q_3 = \frac{7\gamma-31}{\gamma-1}P_0V_0$$

On remplace $\gamma = \frac{5}{3}$ pour un gaz parfait monoatomique :

$$Q_3 = \frac{7 \times \frac{5}{3} - 31}{\frac{5}{3} - 1}P_0V_0 = \frac{7 \times 5 - 31 \times 3}{2}P_0V_0 = -29P_0V_0$$

donc

$$Q_3 = -29P_0V_0$$

La chaleur échangée par le système avec le milieu extérieur $Q_3 < 0$, donc le système cède de la chaleur au milieu extérieur tout en cédant du travail $W_3 < 0$ sur le chemin 3.

4. Comparaison entre les trois chemins ou les trois transformations On a d'après les calculs réalisés ci-dessus :

$$W_1 = -36P_0V_0 < 0 \quad Q_1 = 0$$

$$W_2 = -224P_0V_0 < 0 \quad Q_2 = 188P_0V_0 > 0$$

$$W_3 = -7P_0V_0 < 0 \quad Q_3 = -29P_0V_0 < 0$$

On constate facilement que :

$$W_1 \neq W_2 \neq W_3$$

$$Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3$$

Conclusion : le travail W et la chaleur Q dépendent du chemin suivi ou de la transformation subie par le système.

5. Comparaison de la quantité $(W + Q)$ pour les trois chemins

Chemin 1 :

$$(W_1 + Q_1) = W_1 = -36P_0V_0$$

donc

$$(W_1 + Q_1) = -36P_0V_0$$

On fait la somme du travail et de la chaleur sur le chemin 2 et on a :

Chemin 2 :

$$W_2 + Q_2 = -224P_0V_0 + 188P_0V_0 = -36P_0V_0$$

On fait la sommation de la chaleur et du travail sur le chemin 2 et on a :

$$W_2 + Q_2 = -36P_0V_0$$

Chemin 3 :

On fait la sommation de la chaleur et du travail sur le chemin 3 et on a :

$$(W_3 + Q_3) = -7P_0V_0 - 29P_0V_0 = -36P_0V_0$$

$$(W_3 + Q_3) = -36P_0V_0$$

On conclut que la quantité $(W + Q) = -36P_0V_0$ indépendamment du chemin suivi et que cette quantité ne dépend que de l'état initial et de l'état final. Donc $(W + Q)$ doit être une fonction d'état.

EXERCICE FACULTATIF

A) Système isolé

- A l'équilibre, le gaz parfait dans le compartiment C1 est dans l'état (P_1, V_1, T_1) . Celui qui est dans C2 est à l'état (P_2, V_2, T_2) , avec $P_2 = P_1$ (car équilibre mécanique).
- Les transformations sont adiabatiques $\Rightarrow PV^\gamma = C^{te}$

$$(1) \quad \rightarrow \quad P_0V_0^\gamma = P_1V_1^\gamma$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad 2P_0V_0^\gamma = P_2V_2^\gamma = P_1V_2^\gamma$$

Avec $V_1 + V_2 = 2V_0$ (Cylindre indéformable)

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow 2^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2V_0}{V_1} - 1 \Rightarrow \frac{V_0}{V_1} = \frac{1}{2} \left(1 + 2^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

Et (1)

$$P_1 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^\gamma = P_0 \left[\frac{1}{2} \left(1 + 2^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right]^\gamma$$

Enfin, on a :

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \Rightarrow T_1 = \frac{P_1 V_1}{P_0 V_0} T_0 = \left(\frac{1 + 2^{\frac{1}{\gamma}}}{2}\right)^{\gamma-1} T_0$$

D'autre part :

$$V_2 = 2V_0 - V_1; \quad P_2 = P_1; \quad \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{2P_0 V_0}{T_0} \Rightarrow T_2 = \frac{P_2 V_2}{2P_0 V_0} T_0$$

AN :

- $P_0 = 1 \text{ atm}; V_0 = 2 \text{ l}; T_0 = 300 \text{ K}; \gamma = 7/5$
- $P_1 = 1.48 \text{ atm}; V_1 = 1.51 \text{ l}; T_1 = 335 \text{ K}$
- $P_2 = 1.48 \text{ atm}; V_2 = 2.49 \text{ l}; T_2 = 276 \text{ K}$

B) Système non isolé

1. Equilibre mécanique $\Rightarrow P_1 = P_2 = 5P_0 = 5 \text{ atm}$

— Le gaz dans C_2 subit une compression adiabatique réversible.

$$\Rightarrow PV^\gamma = C^{te} \Rightarrow P_0 V_0^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow V_2 = V_0 \left(\frac{P_0}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Et

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \Rightarrow T_2 = T_0 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

— Dans C_1 , le gaz est dans l'état : $P_1 = 5P_0; V_1 = 2V_0 - V_2$ et $T_1 = \left(\frac{P_1 V_1}{P_0 V_0}\right) T_0$

AN : $P_0 = 1 \text{ atm}; V_0 = 2 \text{ l}; T_0 = 300 \text{ K}; \gamma = 7/5$

— $P_2 = 5 \text{ atm}; V_2 = 2 \times 5^{\frac{5}{7}} \text{ l}; T_2 = 300 \times 5^{\frac{2}{7}} \text{ K} = 475 \text{ K}$

— $P_1 = 5 \text{ atm}; V_1 = 3,37 \text{ l}; T_1 = 2527 \text{ K}$

2. Variation d'énergie interne et chaleur fournie par R

— Dans C_1 : $\Delta U = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1} \Rightarrow \Delta U_1 = 3712,5 \text{ J}$

— Dans C_2 : $\Delta U = \frac{P_2 V_2 - P_0 V_0}{\gamma - 1} \Rightarrow \Delta U_2 = 287,5 \text{ J}$

— La résistance chauffante R, a fournit l'énergie : $Q = \Delta U_1 + \Delta U_2$

$$\text{A.N : } Q = 4000J = 4(kJ)$$