Partie 2 : Mécanique
Solution de la série 3

Exercice 1

1. **Calcul de la norme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:**

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Donc $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{6}$

2. **Calcul du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 2 + 2 = 3$$

3. **L'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$:**

Le produit scalaire est défini comme suit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

L'angle entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donc de $\frac{\pi}{3}$, soit 60°.

Exercice 2

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points A, B, et C sont non alignés.

- Calcul du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1-0)\vec{\imath} + (1-1)\vec{\jmath} + (0-2)\vec{k} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

Donc, $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} - 2\vec{k}$.

- **Calcul du vecteur $\overrightarrow{AC}$** :

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1-0)\vec{\imath} + (0-1)\vec{\jmath} + (1-2)\vec{k} = 1\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} - 1\vec{k}$$

Donc, $\overrightarrow{AC} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$.

- **Calcul du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$** :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{\imath}(0 \times -1 - (-2) \times -1) - \vec{\jmath}(1 \times -1 - (-2) \times 1) + \vec{k}(1 \times -1 - 0 \times 1)$$

$$= \vec{\imath}(0-2) - \vec{\jmath}(-1+2) + \vec{k}(-1)$$
$$= -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$$

Donc, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$ ou $(-2, -1, -1)$.

- **Vérification de l'alignement des points :** Les points A, B, et C sont non alignés si $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq 0$. Ici, le produit vectoriel est $(-2, -1, -1)$, donc les points ne sont pas alignés.

2. Calculer la surface du triangle ABC

   La surface S d'un triangle formé par les points A, B, et C est donnée par :

$$S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

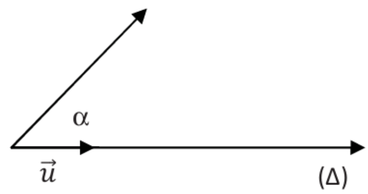
Calculons la norme de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Ainsi :

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Exercice 3 Le vecteur $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ fait un angle α avec un axe (Δ) de vecteur unitaire $\vec{u}$.



1. On sait que $\vec{A} \cdot \vec{u} = \|\vec{A}\| \|\vec{u}\| \cos(\alpha) = \|\vec{A}\| \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{u}}{\|\vec{A}\|}$.

   Donc les angles α, β, et γ respectivement entre $\vec{A}$ et les axes ox, oy et oz sont donnés par :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{i}}{\|\vec{A}\|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{j}}{\|\vec{A}\|}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{k}}{\|\vec{A}\|}$$

2. $\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$, $\quad \cos(\beta) = \frac{2}{\sqrt{14}}$ $\quad$ et $\quad \cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{14}}$

3. On obtient facilement :

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = \frac{3^2}{14} + \frac{2^2}{14} + \frac{1^2}{14} = 1$$

4. Pour montrer que $\vec{A} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0$, il suffit de montrer que $\vec{A} \perp (\vec{A} \wedge \vec{B})$.

   Si les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont dans un plan (P), alors le vecteur $\vec{C} = (\vec{A} \wedge \vec{B})$ est perpendiculaire au plan (P) et donc $(\vec{C} \perp \vec{A})$ et $(\vec{C} \perp \vec{B})$, on peut donc écrire que $\vec{A} \cdot \vec{C} = 0$.

   D'où

$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0$$

Exercice 4

1. $\|\vec{r_1}\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$ $\quad \|\vec{r_2}\| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$ $\quad \|\vec{r_3}\| =$

$\sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$

2. Calcul des composantes et des modules des vecteurs :
   $\vec{A} = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \quad \|\vec{A}\| = \sqrt{81+4+16} = \sqrt{101}$
   $\vec{B} = 1\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} \quad \|\vec{B}\| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$
3. Détermination du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{C} = \vec{r_1} + 2\vec{r_2}$
   $\vec{C} = \vec{r_1} + 2\vec{r_2} = 8\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}$
   $\|\vec{C}\| = \sqrt{64+1+9} = \sqrt{74}$
   $\vec{u} = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} = \frac{8\vec{i}-1\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{74}}$
4. Calcul des produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{r_1}$ et $\vec{r_2}$.
   $\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = 6 - 6 - 2 = -2$
   $$\vec{r_1} \wedge \vec{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 7\vec{j} - 13\vec{k}$$
5. Calcul des produits $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ et $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$
   $$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 19\vec{j} - 33\vec{k}$$
   $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 90 + 38 + 132 = -4$
   $$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -2 & 4 \\ 10 & -19 & -33 \end{vmatrix} = 142\vec{i} + 337\vec{j} - 151\vec{k}$$